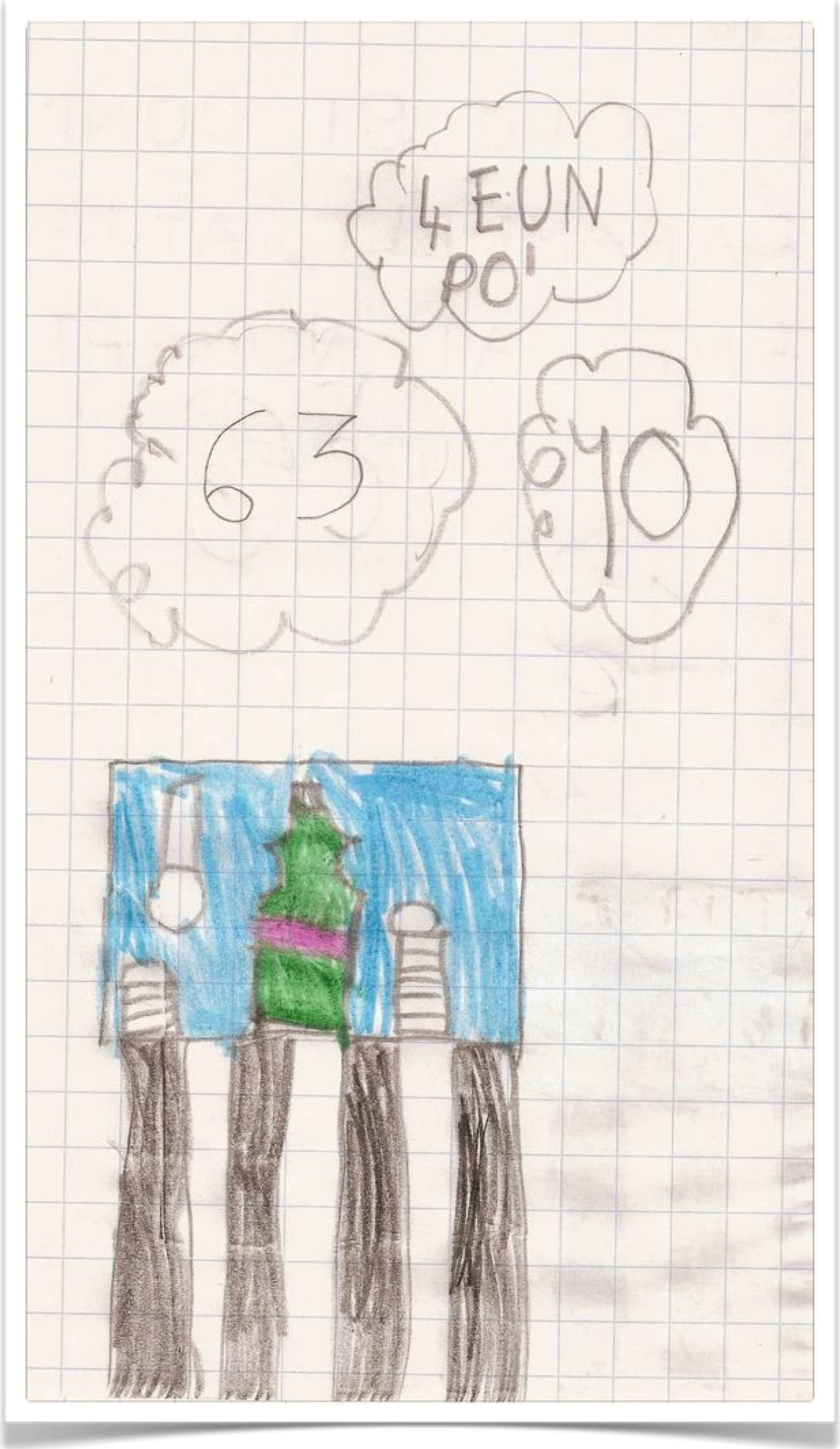
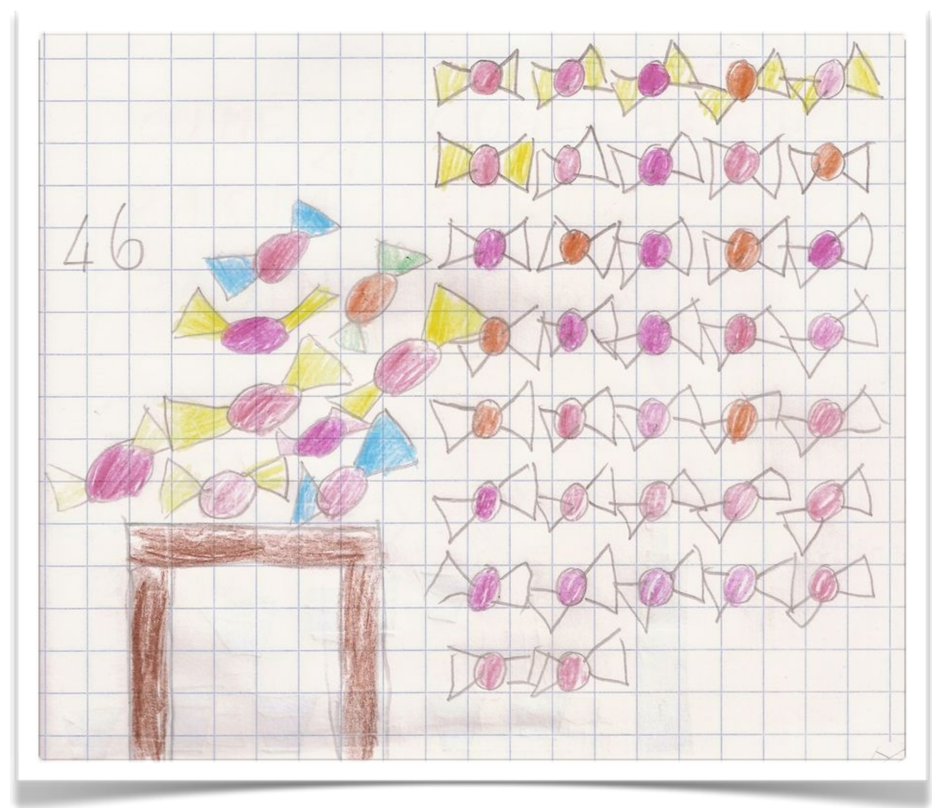


Continuità e discretizzazione



Elementi per una discussione

Donatella Merlo - Nucleo di Ricerca Didattica - Dipartimento di Matematica UNITO

Che cosa farò oggi

- Presenterò le mie riflessioni su discreto/continuo in seguito all'analisi di attività di conteggio svolte negli ultimi tre anni in classi di scuola dell'infanzia e primaria.
- Cercherò di spiegare perché secondo me discreto e continuo sono due modi di guardare i fatti di esperienza che, dal punto di vista didattico, non sono contrapposti ma complementari.
- Metterò in evidenza ostacoli epistemologici, cognitivi, didattici che ho avuto modo di rilevare analizzando i comportamenti e i protocolli degli allievi insieme agli insegnanti.

Quadro teorico

Lakoff, Nunez
Teoria
dell'embodiment

Kuyk
Il discreto e il
continuo

Per capire

Il pallino blu indica pagine in cui cerco di collegare il discorso di matematica a quello di scienze.

Il pallino rosso indica pagine in cui introduco discorsi di matematica, (ma non solo) che andrebbero approfonditi e che riprenderò in laboratorio

Discreto e continuo

Che cosa intendo per *discreto* e *continuo*?

Il **discreto** rappresenta ciò che é discontinuo, distinto, numerabile, le entità discrete hanno confini ben definiti che le distinguono le une dalle altre.

Il **continuo** viene definito da Aristotele (Fisica) come "ciò che é divisibile in parti sempre divisibili" in un processo che non ha fine, le entità continue si presentano quindi come un tutto infinitamente divisibile.

Discreto e continuo

In matematica il discorso si fa più complesso, ma possiamo dire che:

- il **discreto** riguarda le entità aritmetiche e quindi i numeri naturali (tra un naturale e il suo successivo non ci sono altri numeri);
- il **continuo** riguarda le entità geometriche e i numeri reali di cui la retta è la rappresentazione grafica (parlare di successivo non ha più senso perché tra un reale e l'altro esistono infiniti numeri).

Continuo e infinito

L'idea del *continuo* è legata a quella di infinito e di processi che si ripetono all'infinito. Queste sono idee cardine per la comprensione di tutta la matematica.

La mente **embodied** fa uso di una metafora che si chiama 'Metafora Base dell'Infinito'.

In base a questa metafora azioni 'continue' sono concettualizzate in termini di azioni 'ripetute' infinite volte in cui ogni passo è quindi discreto anche se piccolissimo.

Ma il processo, teoricamente infinito, ha bisogno di raggiungere un risultato perché la mente embodied possa concettualizzarlo: anche questo è garantito dalla BMI che ci consente di concepire un processo infinito come una *cosa* e quindi dargli un senso.

G. Lakoff, R. E. Nunez, *Da dove viene la matematica*, Boringhieri

Discreto vs continuo

- Due mondi contrapposti?
- Due differenti aspetti del mondo che occorre discriminare per poterli osservare con la lente giusta.
- Due modi di guardare le cose, per poter comprendere aspetti complementari di una stessa realtà.

Diverse complementarità

- I fatti di esperienza pongono problemi che vanno affrontati con gli strumenti più adatti a prescindere dagli ambiti disciplinari coinvolti.
- L'insegnamento della matematica non deve procedere a compartimenti stagni ma evidenziare le relazioni tra i vari argomenti per farne comprendere la coerenza globale sia nei metodi sia nei contenuti.
- Quindi non ha senso separare **discreto** e **continuo**, **numeri** e **spazio**, **aritmetica** e **geometria**.
- Ma nemmeno **scienze** e **matematica**...

Diverse complementarità

W. Kuyk, *Il discreto e il continuo*, Boringhieri

- Kuyk dice che "la matematica è la scienza esclusiva che studia le connessioni tra le qualità mutuamente irriducibili del discreto e del continuo, del numero e della spazialità... (le) connessioni ... non sono fornite da assiomi... ma sono stabilite dalle discipline matematiche stesse con i loro metodi e risultati"
- Ciò che ci garantisce la connessione é quindi l'acquisizione di un metodo.

La realtà é discreta o continua?

- Dal punto di vista didattico un approccio che parte dalla realtà fisica, e quindi si basa su esperienze e azioni su oggetti concreti, mette gli allievi in situazioni in cui il discreto e il continuo coesistono come 'qualità' di oggetti reali.

Contare nel discreto

- Ad esempio nell’attività del ‘contare’ l’allievo deve effettuare un conteggio e produrre una ‘numerazione’ a partire da un oggetto concreto che reputi contabile.
- Se l'oggetto del conteggio é una collezione i cui elementi sono già individuabili come discreti, la procedura può iniziare immediatamente associando ogni elemento ad un numero naturale.

Contare nel continuo

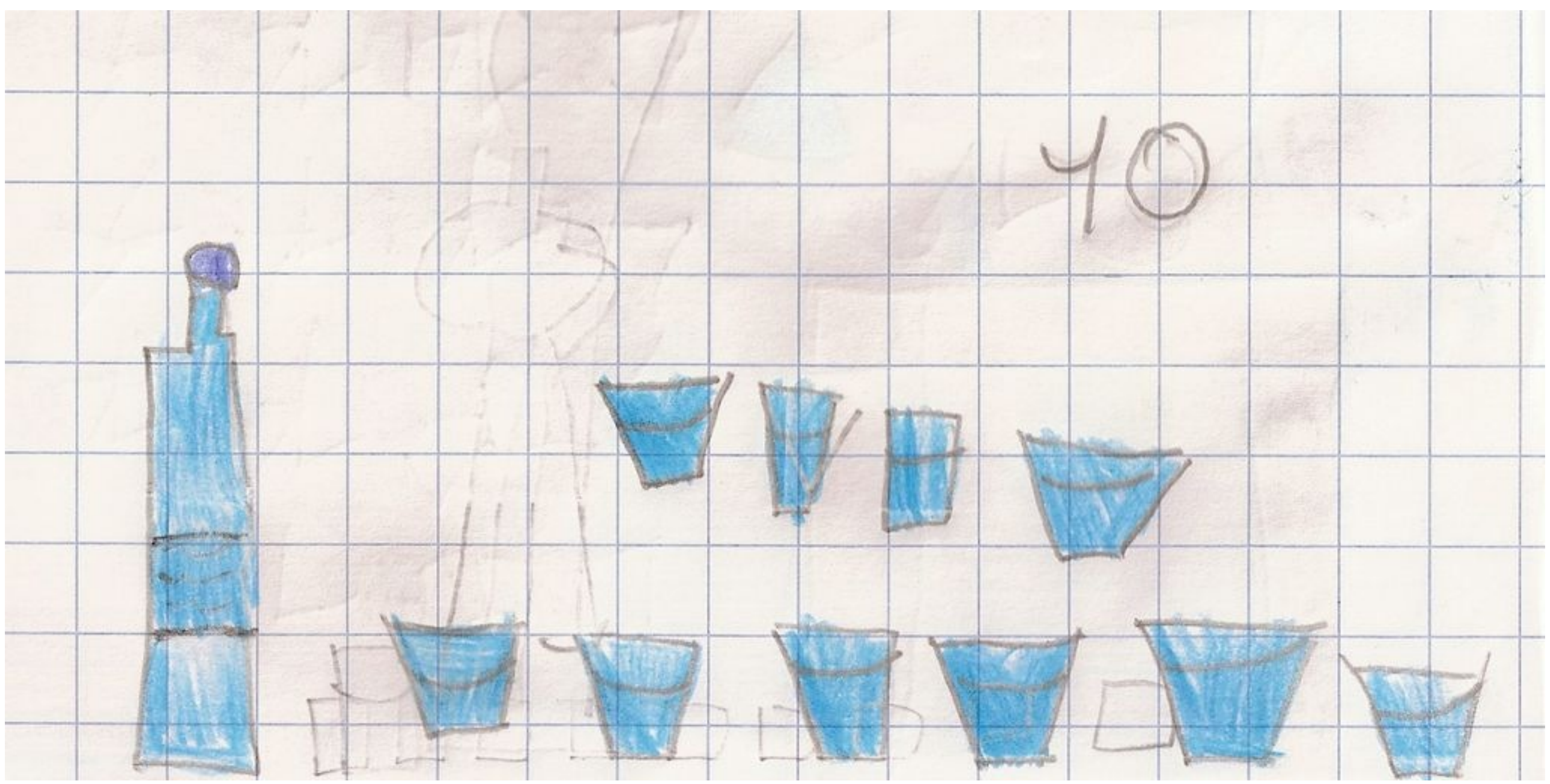
- Se invece l'oggetto del conteggio si presenta come un 'continuo' per poter applicare le azioni tipiche del conteggio e poi 'numerare', l'allievo deve padroneggiare una strategia che gli consenta di 'discretizzare' la grandezza da quantificare per poter procedere.
- Sono le procedure di misura, un campo in cui matematica e scienze si incontrano continuamente.
- Ma emerge quasi subito un problema: i numeri naturali sono sufficienti per quantificare questo tipo di oggetto? Cosa ne facciamo di quel che avanza?

Un esempio: l'acqua

- L'acqua è percepita come un continuo perché nel macro non si possono cogliere le discontinuità, ma nemmeno affinando l'osservazione nel micro queste discontinuità comincerebbero a comparire.
- Come è possibile concepire l'acqua formata da parti che non si vedono? L'acqua e' 'una'.
- Della pioggia puoi contare le gocce, del mare le onde... Dicono i bambini.
- C'è bisogno di passare attraverso l'uso di uno strumento, di un'azione concreta, fisica sull'acqua, per avviare il processo di discretizzazione: l'uno diventa 'tanti'... Ma quanti? E quanti di che?

Numerabilità e struttura

- L'azione concreta di fare parti, motivata dalla ricerca di una numerabilità, non può andare oltre un certo punto: si può contare l'acqua a bicchieri, a cucchiai, a gocce ... ma poi ci si deve fermare.



Numerabilità e struttura

- Fare parti sempre più piccole si trasforma in un'azione puramente mentale che rende possibile concepire l’esistenza di particelle di acqua che riusciamo ad immaginare anche senza vederle materialmente.
- Le parti ricomposte secondo certe regole ricostituiscono la struttura ‘continua’ a partire da particelle ‘discrete’.

Il ruolo del numero ‘uno’

- Tutta la materia è naturalmente **discreta**, anche se è percepita come un continuo.
- Frantumare materiali è come discretizzare, fare 'parti' per rendere contabile ciò che prima era un ‘uno’ indistinto.
- Il conflitto tra questo tipo di 'uno' e **l'uno** come inizio di un conteggio pone dei problemi a livello didattico se mancano **pivot cognitivi** che permettano di costruire delle forme di ragionamento coerenti.

Il ruolo del numero ‘uno’

- Per ricomporre il conflitto tra **uno** (intero, continuo) e **parti** (numerabili, discrete) occorrono strategie che consentano di passare da un modo di contare all’altro senza perdita di senso e usando i numeri giusti.
- I naturali, quando si fanno parti, non sembrano molto utili, servono altri tipi di numeri che consentano di numerare anche i pezzi più piccoli di quelli che abbiamo numerato con uno, due, tre...
- Servono i numeri razionali.

Parti e tutto

Il problema parti/tutto, emerge anche in altre situazioni, ad esempio...

- contare per gruppi una collezione molto grande di oggetti, invece di contare singoli oggetti (raggruppare per contare, la moltiplicazione e la divisione)
- fare parti uguali di una collezione di oggetti (la frazione come operatore su quantità e quindi su numeri)

Come impara a 'discretizzare' il continuo, il bambino può anche imparare a 'continuizzare' il discreto per vederlo come un tutto? Quanto influisce questa capacità sulla comprensione della matematica?

Operare nel discreto e nel continuo

- L'intreccio dei problemi che emergono permette di comprendere come sia ricco questo ambito di lavoro.
- Si dovrebbe anche capire perché penso sia bene affrontare i problemi connessi al conteggio introducendo subito situazioni in cui i bambini debbano affrontare il problema del continuo, non solo per dare un modo di guardare più consono alla realtà che li circonda ma anche per introdurre saperi matematici connessi tra loro dal senso.
- Ma devono imparare a discriminare le diverse situazioni e adeguare le azioni al compito.

Discriminare tra discreto e continuo

- Bambini molto piccoli (5-6 anni) usano schemi di comportamento mutuati dalla vita sociale, dai modi di agire degli adulti che acquisiscono attraverso esperienze quotidiane.
- I comportamenti e il linguaggio che li accompagna dimostrano una buona padronanza delle situazioni e delle regole che governano il discreto e il continuo.

Continuizzare il discreto

- I bambini, quando devono contare polenta, vedono i granelli, magari provano a contarli, ma subito si accorgono che vanno incontro ad un numero 'troppo grande' per essere concepito come contabile.
- La polenta viene quindi rimessa insieme e trattata come un 'continuo' e, come tale, sarà di nuovo discretizzato, ma in un modo diverso: a manciate, a cucchiai, a mestoli...

La polenta

Scuola Materna Deledda (Torino)
Insegnante Luisa Ballesio

C: è tantissima!
M: è cinque! (conta con il dito dei livelli immaginari, dividendo il sacchetto in 5 parti)
C: ma no, io conto quattro (sempre con il dito divide in quattro parti)
M: allora sono 4 litri!
....
S: dentro la conti “mezzo” fino a qui (indica con il dito la metà del sacchetto)
C: sì, fai metà e conti tutta questa e poi questa ... (indica la parte sotto, indica a metà e sopra)
M: e allora sono due... (indica con il dito in alto e basso)
....

La polenta

Scuola Materna Deledda (Torino)
Insegnante Luisa Ballesio

M: ma possiamo anche farlo con il cucchiaio...
L: con un cucchiaio?
......
L: hai preso il cucchiaio?
M: no, è il mestolo!
....
A: ho io il mestolo, poi te lo passo... (A. inizia a prendere la farina con il mestolo, i compagni tengono il sacchetto, contano mentre la farina viene versata nel contenitore, C. conta senza aspettare il mestolo successivo, anche F. è veloce...)
A: aspetta, siamo a tre!!
M: aspettiamo a contare quando la versa giù...
....
S: ne abbiamo contati venti
A: sì, venti chili
L: venti chili?
M: no, venti mestoli!

Le rappresentazioni

Che cosa pensano i bambini?

Questa attività pone diversi tipi di problemi e c'è da chiedersi che cosa pensano veramente i bambini nelle diverse situazioni che ho delineato o ancora che cosa pensano

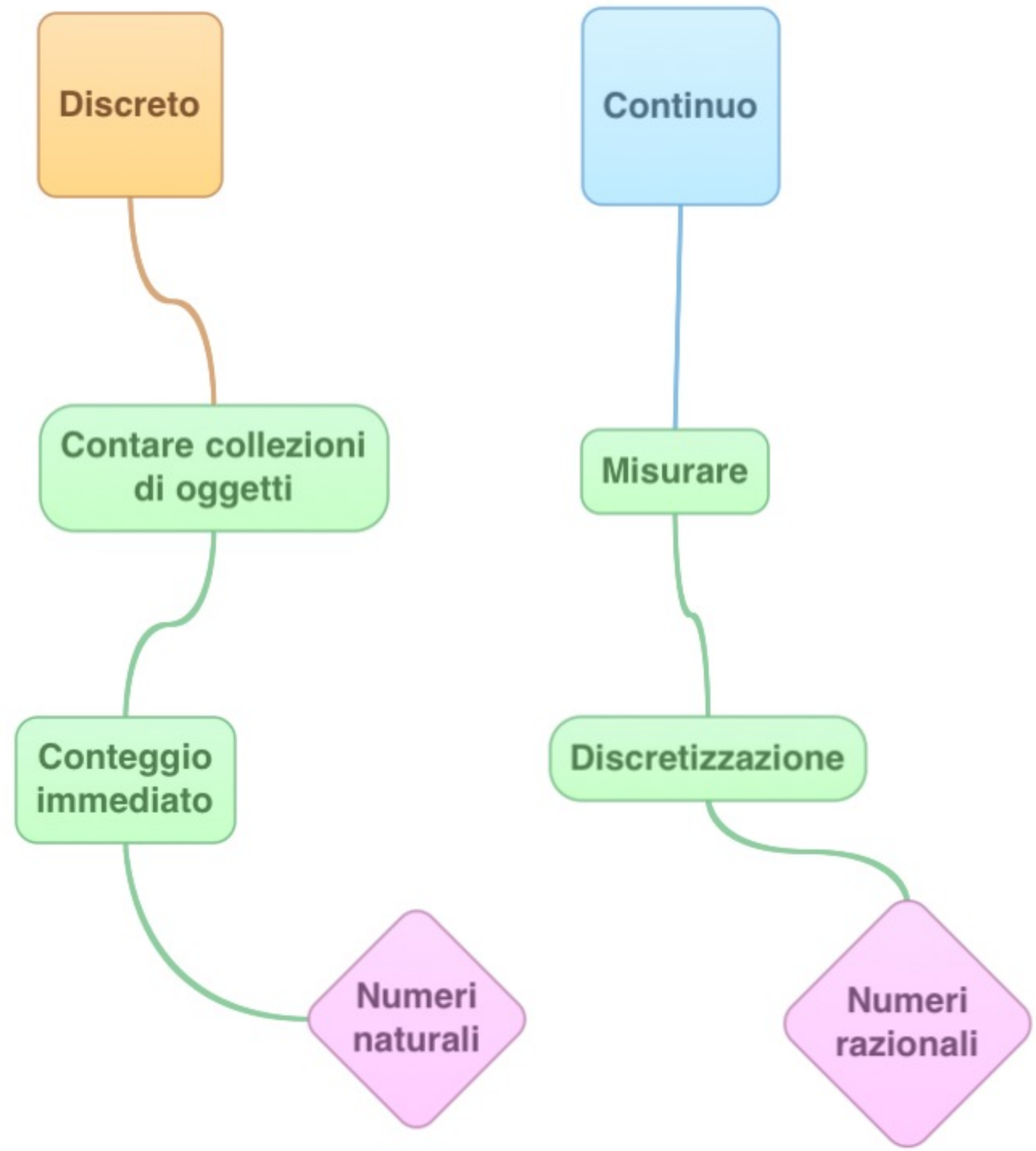
- quelli che abbandonano il conteggio dei granelli di polenta perché sono troppi...
- quelli che contano la pasta a bicchieri invece che a pezzi...
- quelli che contano i cucchiai di farina che servono per riempire un bicchiere e i bicchieri che riempiono con un pacco...

Un linguaggio misto

- Per quantificare una proprietà i bambini usano un linguaggio misto di parole e numeri (una spanna e mezza, un passo lungo e un passo corto, un bicchiere grande e un bicchiere piccolo)
- Le parole mezzo, grande/piccolo, lungo/corto non sono dei numeri, servono a definire la quantità ma cambiano le regole del gioco.

Parole che diventano numeri

Capire che anche 'mezzo', 3 bicchieri grandi e 1 piccolo hanno un posto nei numeri, comporta la definizione di nuove entità numeriche che si comportano in parte come i numeri naturali e in parte con regole nuove.



Scegliere il modo di operare

- Bisogna far riflettere gli allievi sulle diverse modalità e su come sia possibile 'numerare' usando le strategie della misura: questo fa ancora parte della didattica del numero.
- Cambia l'insieme numerico e cambiano le mosse da fare ma stiamo ancora parlando di numeri.

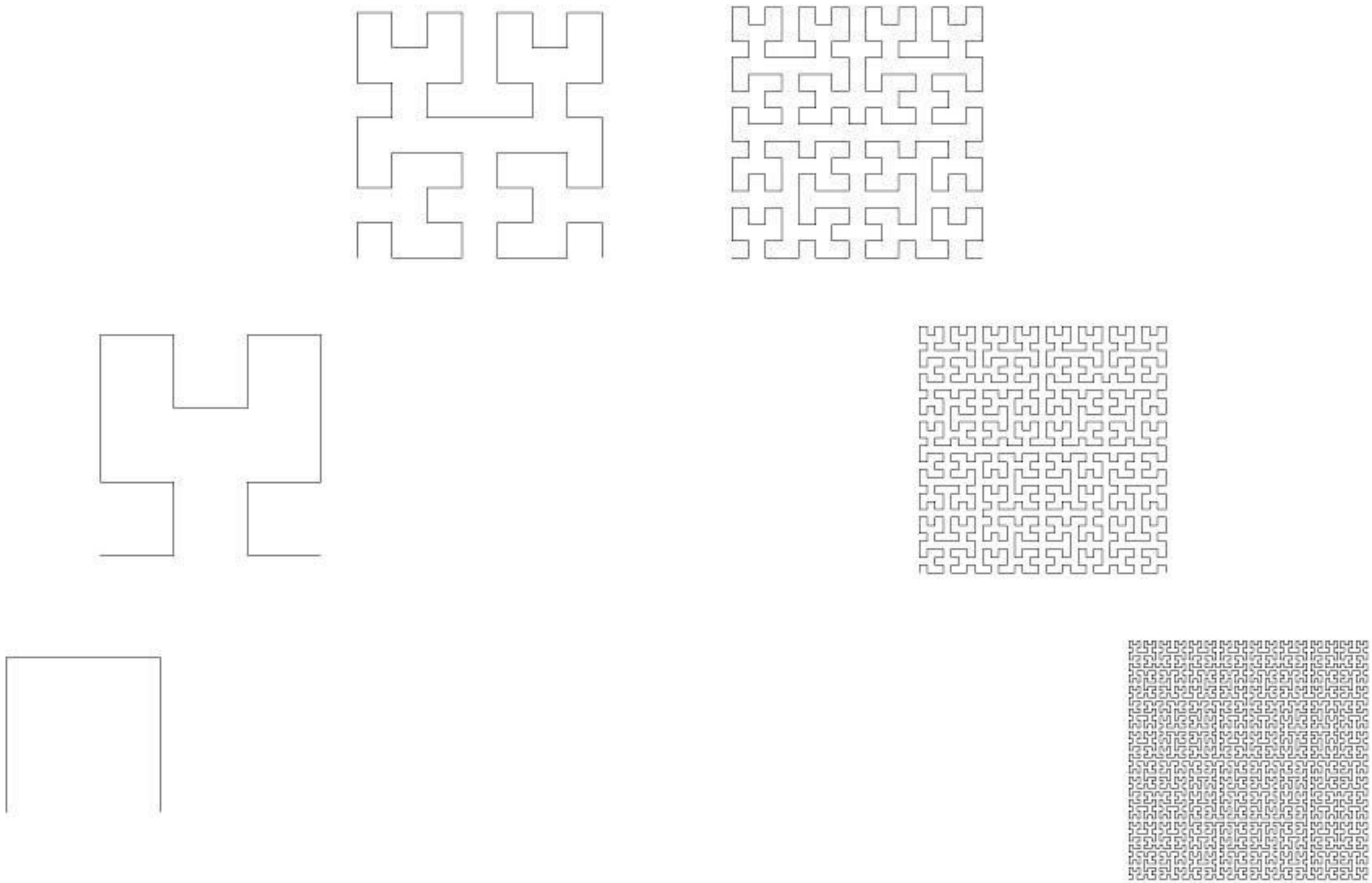
Discretizzare una superficie

- Per quantificare l'estensione di una superficie occorre suddividerla in un certo numero di parti e poi contarle.
- Come devono essere queste parti? Che forma, che tipo di estensione devono avere?
- Un problema che per un adulto e scontato per un bambino può non esserlo. Perché discretizzare a quadratini? Tante linee messe ben vicine le une alle altre non potrebbero riempire allo stesso modo?

Curve che riempiono lo spazio

- Le curve di Hilbert, di Peano, di Sierpinska fanno questo, riempiono lo spazio bidimensionale pur essendo delle linee ma non sono linee reali, sono funzioni che mettono in corrispondenza l'insieme dei numeri reali da 0 a 1 con i punti di un quadrato unitario per cui esauriti i numeri reali abbiamo anche esaurito il quadrato unitario. E lo spazio dovrebbe essersi riempito...
- Ė una costruzione tutta metaforica che si basa su un'idea del continuo molto diversa dalla precedente assolutamente non esperienziale.

La curva di Hilbert passo passo



Conflitto cognitivo

- Per i bambini le linee occupano fisicamente una parte di spazio, ma sotto non ci sono i costrutti teorici che abbiamo visto prima, c'é solo concretezza.
- Pensare alle linee come enti geometrici privi di consistenza fisica non e' facile e soprattutto non avviene spontaneamente, anche perché si tende a far operare costantemente gli allievi con 'modelli' degli enti geometrici che hanno una loro fisicita'.
- I punti nelle migliori delle ipotesi sono concettualizzati come dischi con il diametro che diminuisce progressivamente ... ma può azzerarsi? E se i punti non hanno dimensione che ne e' delle linee?

Conflitto cognitivo

- Perdendo la fisicità questi oggetti perdono anche la possibilità di esistere e solo con la padronanza di metafore appropriatet diventiamo capaci di immaginare un punto e una linea in senso astratto come enti geometrici.
- Altrimenti niente ci impedisce di ricreare il continuo di una superficie a partire da linee che messe ben vicine non lasciano spazi vuoti.

Base per altezza: che senso può avere?

Quando si introduce la formula 'base per altezza' si va a toccare il modo di concettualizzare il bidimensionale a partire dal monodimensionale.

Qual é il senso che possono dare i bambini alla moltiplicazione di due numeri che rappresentano delle lunghezze?

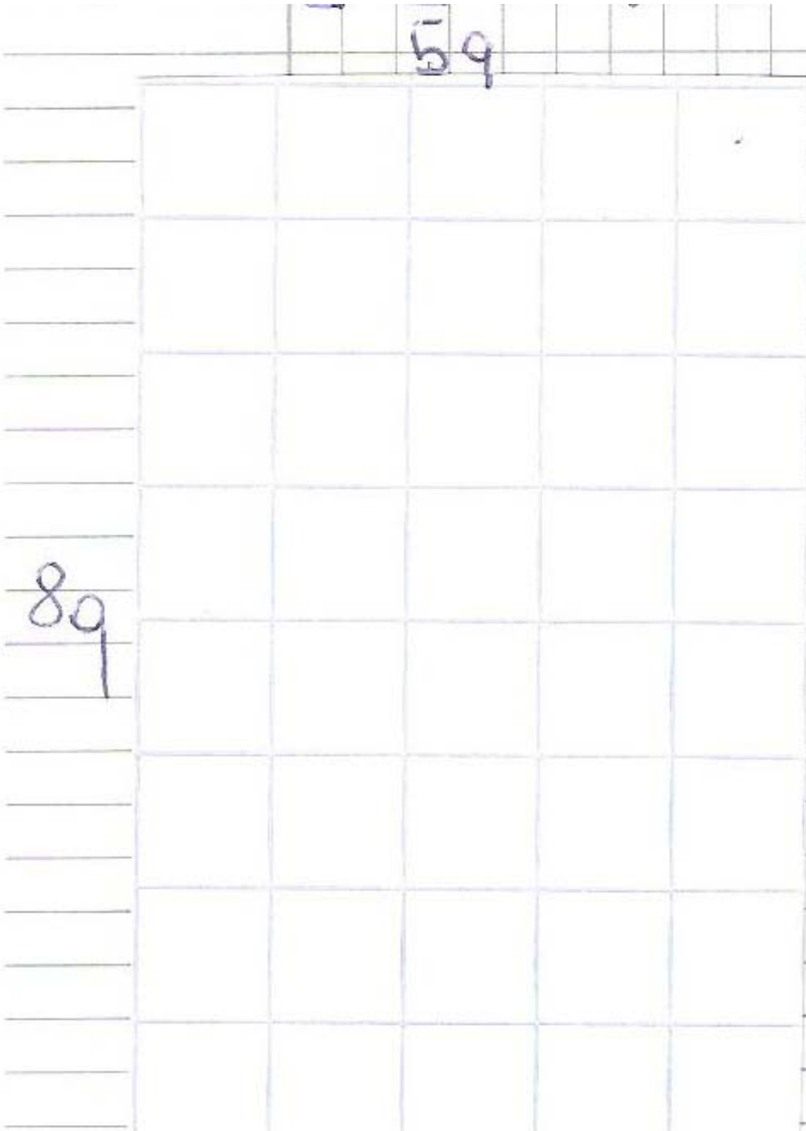
Il problema coinvolge tante idee matematiche che vanno disintrecciate e reintrecciate senza perdita di senso.

Schemi moltiplicativi

- La formula **base x altezza** intuitivamente si rifà agli schemi della moltiplicazione che sono di due tipi: addizione ripetuta di una stessa quantità, ripetizione di un certo numero di volte dell'azione di aggiungere sempre la stessa quantità.
- Base x l'altezza, se si parte da questi schemi, potrebbe anche significare 'prendere la base, che ha una sua lunghezza e una sua fisicità e riprodurla tante volte finché si esaurisce lo spazio indicato dall'altezza, facendo attenzione a non lasciare vuoti'.
- In questo caso il numero dell'altezza é usato non per il valore che rappresenta, ma come secondo fattore di una moltiplicazione a cui il bambino dà senso solo perché rispetta le regole del contratto didattico.

Schemi moltiplicativi

- Lo schema moltiplicativo geometrico evocato dalla formula base x altezza si rifà invece ad un altro tipo di concettualizzazione della moltiplicazione che non è spontaneo, quindi va appreso.
- Numero quadretti in orizzontale x numero quadretti in verticale = numero quadretti in totale é uno schema più adeguato che richiede una discretizzazione a quadretti unitari.
- Per capire il senso di questo nuovo tipo di moltiplicazione devono anche essere risolti alcuni problemi relativi al conteggio ad esempio: come si contano i quadretti sugli angoli?



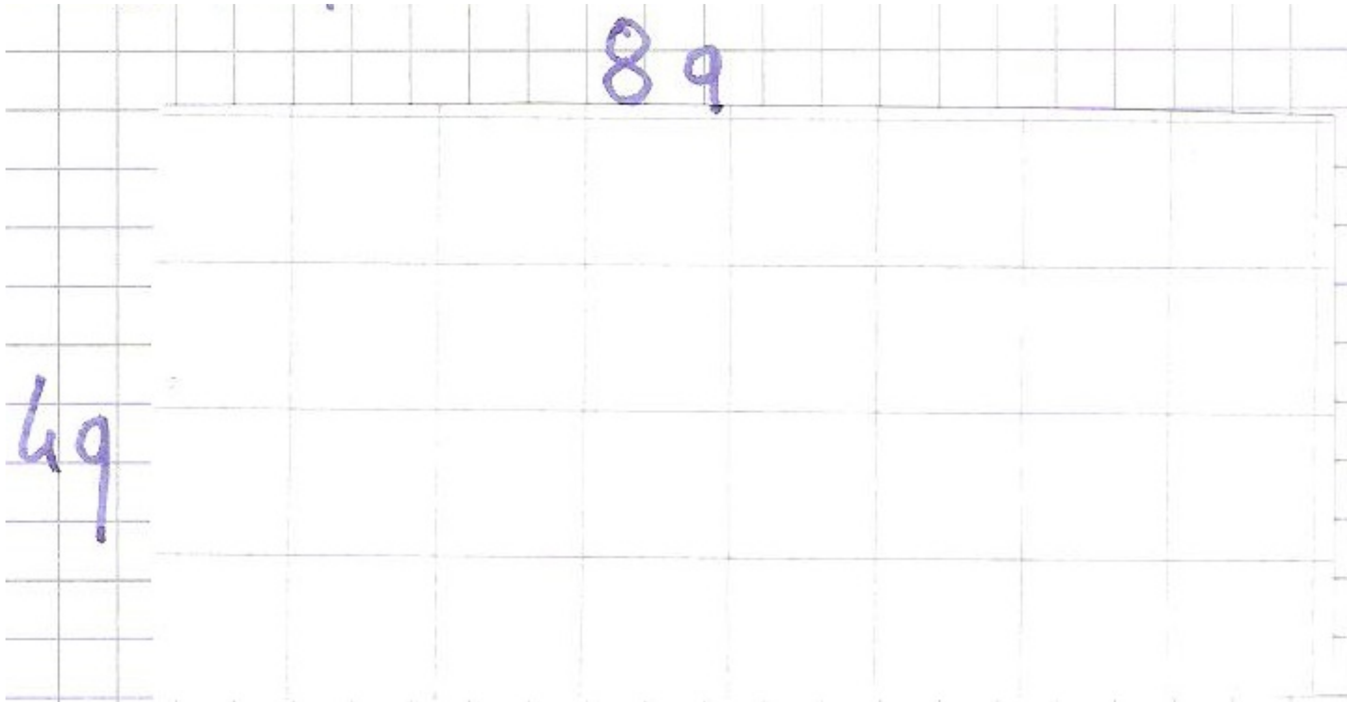
40 quadretti.

$5 \times 8 = 40$ q

$8 \times 5 = 40$ q

$5+5+5+5+5+5+5+5=40$ q

$8+8+8+8+8=40$ q



4 X 8 = 32

8 n.c. X 4 n.r. = 32 n. qadretti

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6								

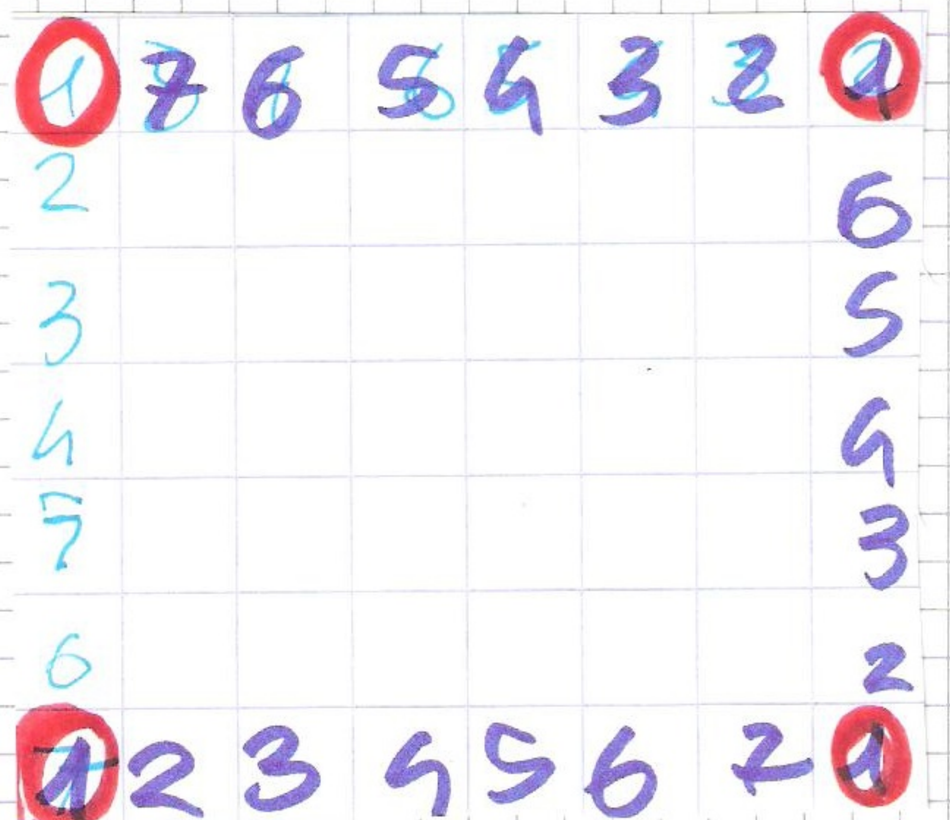
9X6=549

9+9+9+9+9+9
=549

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									

10 X 4 = 40

4 X 10 = 40



$6 \times 2 \rightarrow 12$ +

$7 \times 2 \rightarrow 14$ =

26 +

20 =

46 −

4 =

42 q. totali nell'quadrilatero.

Anna e Vittoria

Bilinearita'

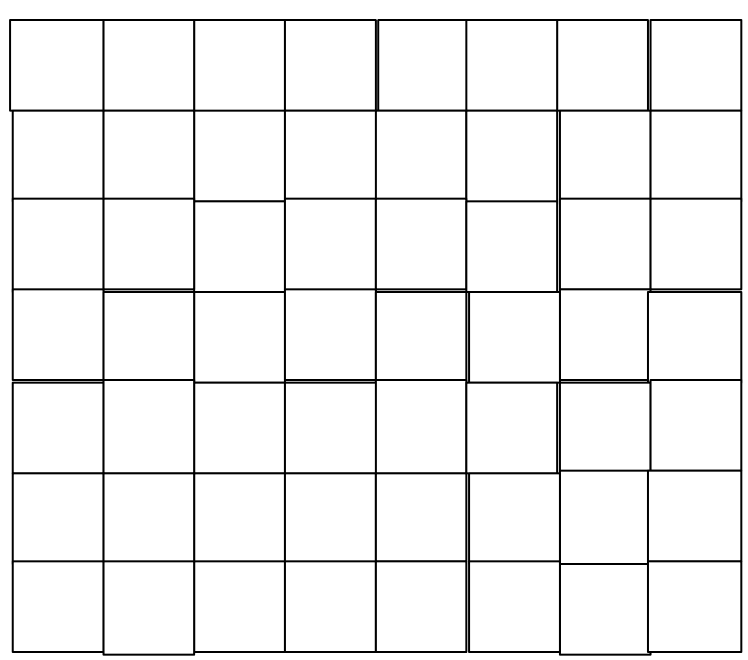
- Nell'operazione base x altezza e' anche coinvolto lo schema della proporzionalità che in questo caso e' doppia.
- Se avessi un rettangolo di base unitaria basterebbe contare i quadretti lungo l'altezza per quantificare la superficie e raddoppiando la base raddoppierebbe anche la superficie.
- Ma se raddoppio anche l'altezza che cosa succede? La superficie quadruplica. Il rapporto é bilineare.

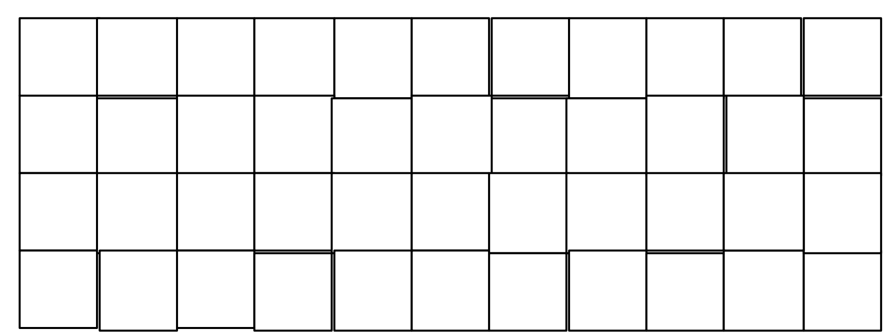
Il perimetro che contiene spazio

- Un altro ostacolo che interviene riguarda la concettualizzazione di perimetro e area.
- I bambini di solito interpretano il grande e il piccolo come superficie facendo riferimento alle linee di confine di una superficie.
- Se le linee sono contenitori di spazio allora più il perimetro è grande più lo spazio contenuto al suo interno è grande per cui a perimetri uguali devono corrispondere aree uguali.

Il problema della pizza

Le cuoche tagliano la pizza a rettangoli. Oggi a Giuseppe è toccato un rettangolino di pizza di 8 cm di lunghezza e 7 di larghezza, mentre Camilla ne ha avuto uno di 11 di lunghezza per 4 di larghezza.
Chi mangia più pizza? Perché?





Rielaborare schemi

È evidente che una formalizzazione precoce e troppo spinta non aiuta a superare gli ostacoli a cui accennavo prima (che possono diventare anche didattici se l'insegnante introduce troppo presto le formule canoniche).

Occorre rimandare la formalizzazione al momento in cui i bambini saranno in grado di legare lo schema moltiplicativo ri-costruito su base geometrica (prodotto cartesiano, schieramenti) a quello della doppia proporzionalità.

E poi ci sono tante attività sull'equiestensione che consentono di inventare le formule mantenendo il controllo del loro significato a partire dall'unica che va introdotta, quella del rettangolo.

Strategie di controllo

Ho osservato che i bambini che avevano successo nel contare i quadretti di un rettangolo mettevano in relazione fatti aritmetici come 2 + 2 + 2 + 2 = 8   2 x 4 = 8   4 x 2 = 8 4 + 4 = 8 con una strategia di conteggio basata sull'uso delle tabelline per cui contando per 2 per 4 volte davano senso anche alla scrittura 2 x 4 riferita ad un rettangolo di dimensioni 2 e 4 già suddiviso con la quadrettatura.

La moltiplicazione é controllata dall'addizione ripetuta e collegata con una strategia di conteggio.

Alcuni però avevano grossi problemi a tenere sotto controllo il conteggio dei quadretti perché interferivano gli ostacoli a cui ho accennato prima - e i loro protocolli sono ovviamente i più interessanti.

Strategie di controllo

Tutto si complica poi quando intervengono i numeri decimali: che senso si può dare a 3,5 x 4,5 = 15,75? Perché moltiplicando due numeri con una sola cifra decimale si ottiene un risultato che ne ha due?

Di nuovo i problemi si intrecciano e coinvolgono tanti aspetti diversi della matematica che devono in qualche modo trovare una loro collocazione nella testa dei bambini.

Ma questa é di nuovo un'altra storia....